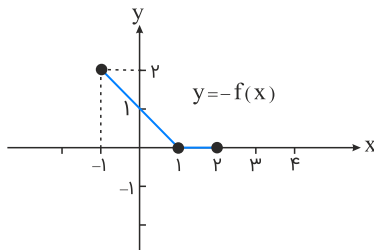




گزینه ۱

۱

برای پیدا کردن نمودار $y = f(x)$ از روی نمودار $y = f(x - 2) + 1$ ، ابتدا نمودار را دو واحد به طرف چپ و سپس یک واحد به طرف پایین انتقال می‌دهیم. در نهایت نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -f(x)$ به دست آید.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

گزینه ۲

۲

ابتدا ضابطه وارون تابع f را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x - 1}{x + 2} \Rightarrow yx + 2y = 2x - 1 \Rightarrow x(y - 2) = -2y - 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y + 1}{2 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{2 - x}$$

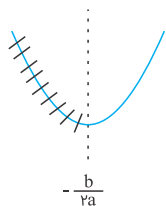
بنابراین باید تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = \frac{2x + 1}{2 - x}$ و خط $y = 3x$ را معین کنیم که برابر با تعداد جواب‌های معادله $\frac{2x + 1}{2 - x} = 3x$ است، پس:

$$2x + 1 = 6x - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

مجموع ضرایب معادله بالا برابر با صفر است؛ پس $x = 1$ و $x = \frac{1}{3}$ جواب‌های آن هستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۸

چون ضریب x^2 مثبت است، پس دهانه سهمی روبه بالا است؛ لذا سهمی در $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ صعودی است.



پس (۲-) می‌تواند طول رأس سهمی و یا بزرگتر از طول رأس سهمی باشد.

$$\frac{-b}{2a} \leq -2 \Rightarrow \frac{-k}{6} \leq -2 \Rightarrow -k \leq -12 \Rightarrow k \geq 12$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

$$\text{دامنه} : |x - 1| < 2 \Rightarrow -2 < x - 1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3$$

چون طرفین نامعادله $|x - 1| < 2$ نامنفی هستند، می‌توانیم به توان ۲ برسانیم:

$$\Rightarrow (x - 1)^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

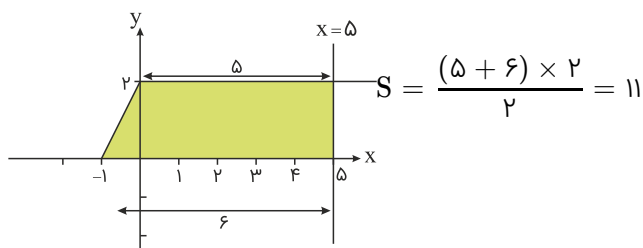
بنابراین تابع f همواره منفی است. محور تقارن $x = 1$ است. باتوجه به دامنه که بازه $(-1, 3)$ است، تابع ابتدا نزولی و بعد صعودی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

$$f(x - |x|) = \begin{cases} f(0) & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 & ; x \geq 0 \\ f(2x) & ; x < 0 \end{cases}$$

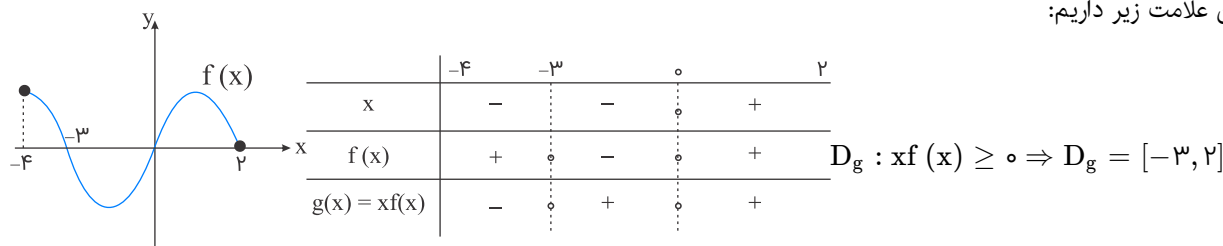
بنابراین نمودار $f(x - |x|)$ به صورت زیر است:

حال مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

نمودار $y = f(x)$ ، با انتقال نمودار $y = f(x - 2)$ به اندازه ۲ واحد به سمت چپ به دست می‌آید.
حال با جدول تعیین علامت زیر داریم:



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به راست } 2} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y = x$ و $y = \sqrt{-x+2}$ (نیمساز ناحیه اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2} = x \quad (*) \xrightarrow{\text{به توان } 2} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$x = -2$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادله (*) صدق نمی‌کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

تابع f اکیداً نزولی است، پس با کاهش x ، مقدار آن افزایش می‌یابد. باتوجه به آنکه f در $x = 1$ پیوسته است و مقدار تابع f در $x = 1$ برابر با ۶ می‌شود، پس وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، $6 < f(x) < 7$ است:

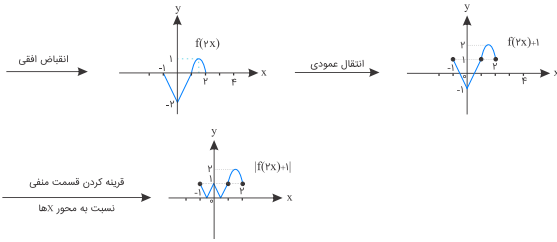
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = [6^+] = 6$$

همچنین تابع g اکیداً صعودی است، پس با کاهش x ، مقدار تابع نیز کاهش می‌یابد. تابع g در $x = 1$ پیوسته است و مقدار آن در $x = 1$ برابر با ۳ است، پس وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، $2 < g(x) < 3$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [g(x)] = [3^-] = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[f(x)]}{[g(x)]} = \frac{6}{2} = 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

معادله را به فرم $|f(2x) + 1| = m$ می‌نویسیم. نمودار $|f(2x) + 1|$ را رسم می‌کنیم.
مطابق نمودار، برای اینکه خط $y = m$ نمودار را در ۴ نقطه قطع کند باید $0 < m \leq 1$ باشد.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

برای به دست آوردن برد تابع $g \circ f$ ابتدا باید ضابطه آن را تشکیل دهیم.

$$f(x) = x - [x], \quad g(x) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{1-f(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{1-x+[x]}{x-[x]} = \frac{1}{x-[x]} - 1$$

می‌دانیم $0 \leq x - [x] < 1$ ، ازطرفی $x - [x]$ نمی‌تواند برابر صفر باشد، زیرا مخرج کسر تعریف نمی‌شود، لذا: .

$$0 < x - [x] < 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x - [x]} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) > 0 \Rightarrow R_{g \circ f} = (0, +\infty)$$

کنکور سراسری ریاضی و فیزیک خارج از کشور ۱۳۸۶

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

کافی است مرحله به مرحله انتقال‌ها را انجام دهیم:

$$y = 2|x + 1| + 3 \xrightarrow{x \rightarrow x-1} y = 2|x - 1 + 1| + 3$$

$$\xrightarrow{y \rightarrow -y} y = -(2|x| + 3) = -2|x| - 3$$

$$\xrightarrow{y \rightarrow y+4} y = -2|x| - 3 + 4 \Rightarrow y = -2|x| + 1$$

حال نقاط تلاقی با محور x ها و y ها را به دست می‌آوریم:

$$y = 0 \Rightarrow |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} : \text{مجموع طول و عرض نقاط}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

$$(y_0, x_0) \in f \Rightarrow f(y_0) = x_0$$

$$\Rightarrow \frac{x - 3}{2} = y_0 \Rightarrow x - 3 = 2y_0 \Rightarrow x = 2y_0 + 3$$

$$y = -2f\left(\frac{x-3}{2}\right) + y_0 \Rightarrow y = -2f(y_0) + y_0 = -2x_0 + y_0 = -x_0$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

الف) تابع $g(x) = \frac{5}{2}$ وارون پذیر نیست.

ب) اگر $f(7) = 5$ و $g(4) = 7$ ، آنگاه $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = 5$

پ) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ بنابراین f و g مساوی نیستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

$$y = \frac{3^x - b}{a} \Rightarrow ay = 3^x - b \Rightarrow 3^x = ay + b \Rightarrow \log_3 3^x = \log_3 (ay + b) \Rightarrow x = \log_3 (ay + b)$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می کنیم}} f^{-1}(x) = y = \log_3 (ax + b) \Rightarrow D_{f^{-1}} = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$$\Rightarrow a\left(-\frac{1}{3}\right) + b = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}a + b = 0 \quad (1)$$

$$f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow \log_3 (3a + b) = 2 \Rightarrow 3a + b = 9 \quad (2)$$

از حل دو معادله (۱) و (۲)، داریم:

$$a = 2/7, \quad b = 0/9$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۱ ۱۳۹۷

مختصات نقطه $A(b, 2)$ در معادله $2x + 5y = 8$ صدق می کند، پس:

$$2b + 10 = 8 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow A(-1, 2)$$

$$A(-1, 2) \in f^{-1} \Rightarrow A'(2, -1) \in f$$

$$\Rightarrow f(2) = 8 + 6 + a = 14 + a = -1 \Rightarrow a = -15$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

در تابع وارون می‌دانیم که:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

در این مسئله f و g وارون یکدیگرند. با انتخاب دو عدد مناسب داریم:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow g(1) = 0 \Rightarrow \frac{1+b}{2} = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$g(2) = \frac{2+(-1)}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = 2 \Rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{5}{4} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a + b = 0$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۷

از رابطه $f^{-1}(g(a)) = -1$ نتیجه می‌گیریم:

$$g(a) = f(-1) = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 3$$

پس:

$$\frac{a+1}{a-1} = 3 \Rightarrow a+1 = 3a-3 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۷

$$f(3x-1) = \frac{2x-3}{5} \xrightarrow[x=\frac{t+1}{3}]{} f(t) = \frac{2\left(\frac{t+1}{3}\right)-3}{5}$$

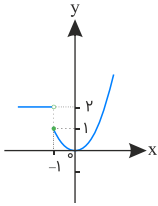
$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x-7}{15}$$

$$\Rightarrow g \circ f(x) = 3\left(\frac{2x-7}{15}\right) - 1 = \frac{6x-36}{15}$$

$$\begin{cases} y = g \circ f(x) \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \frac{6x-36}{15} = -x \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۷

نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



بنابراین تابع در بازه $[-1, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ بنابراین داریم:

$$-1 < a < b < 0 \xrightarrow[\text{نزولی}]{\text{تابع اکیداً}} f(a) > f(b)$$

$$-1 < a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2 > 0 \xrightarrow[\text{صعودی}]{\text{تابع اکیداً}} f(a^2) > f(b^2)$$

لازم به ذکر است که رابطه گزینه "۳" به ازای همه مقادیر a و b در بازه $(-1, 0)$ برقرار نیست. همچنین با جایگذاری $f(a) = |a|^2$ ، $f(b) = |b|^2$ و استفاده از این نکته که $|a|^2 < |a|$ است، نادرستی رابطه گزینه "۴" نیز به سادگی اثبات می شود.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

برای یافتن نقاط تقاطع تابع $f \circ g$ با محور x ها باید معادله $(f \circ g)(x) = 0$ را حل کنیم، یعنی: $f(g(x)) = 0$
برای حل این معادله ابتدا ریشه های f را می یابیم. چون f در دو نقطه به طول های ۶ و $\frac{-1}{۴}$ محور x ها را قطع می کند، پس:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 6, x = \frac{-1}{4}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) = 6, g(x) = \frac{-1}{4}$$

از آنجا که $g(x) = x - \sqrt{x}$ ، بنابراین:

$$x - \sqrt{x} = 6 \text{ و } x - \sqrt{x} = \frac{-1}{4}$$

باتوجه به گزینه ها $x = 9$ ریشه معادله اول و $x = \frac{1}{۴}$ ریشه معادله دوم است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

ابتدا در تابع $f(x)$ ، به جای x ، $g(x)$ را جایگذاری می‌کنیم و آن را با تابع $(fog)(x)$ که در صورت سؤال داده شده است، معادل قرار می‌دهیم و $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = g^2(x) - 4g(x) + 3 = x^2 + 3x + \frac{5}{4}$$

در دو سمت رابطه فوق مربع کامل تشکیل می‌دهیم:

$$\Rightarrow (g(x) - 2)^2 - 4 + 3 = (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow (g(x) - 2)^2 - 1 = (x + \frac{3}{2})^2 - 1$$

$$\Rightarrow g(x) - 2 = \pm(x + \frac{3}{2}) \xrightarrow{\text{شیب } g(x) \text{ مثبت است}} g(x) = x + \frac{7}{2}$$

برای به دست آوردن $g(f(x))$ ، در تابع $g(x)$ ، به جای x ، $f(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$g(f(x)) = f(x) + \frac{7}{2} = x^2 - 4x + 3 + \frac{7}{2} = x^2 - 4x + \frac{13}{2}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

می‌دانیم که برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را تابع صعودی می‌نامیم؛ پس:

$$10 - x \leq x^2 + 4 \leq 2x + 7$$

$$\Rightarrow 10 - x \leq x^2 + 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 \geq 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \quad (I)$$

$$\Rightarrow x^2 + 4 \leq 2x + 7 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in [-1, 3] \quad (II)$$

$$I \cap II : x \in [2, 3] \Rightarrow \max(b - a) = 3 - 2 = 1$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x - 2)^3 + 1$$

$$\Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y - 1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1} + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1} + 2$$

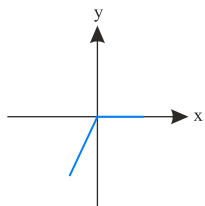
باتوجه به ضابطه f^{-1} داریم:

$$f^{-1}(x) = g(x - 1) + 2$$

بنابراین $g(x)$ را باید یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \geq 0 \\ 2x & ; x < 0 \end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینید تابع f در $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) صعودی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

$$f(x) = \frac{x+1}{x+a} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x}+1}{-\frac{1}{x}+a} = \frac{\frac{-1+x}{x}}{\frac{-1+ax}{x}} = \frac{x-1}{ax-1}$$

$$f(x) \cdot f\left(\frac{-1}{x}\right) = -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+a} \times \frac{(x-1)}{ax-1} = -1 \Rightarrow a = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

دامنه تابع f ، بازه $[-4, 7]$ است؛ بنابراین:

$$-4 \leq 2x - 1 \leq 7 \Rightarrow -3 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 4$$

اعداد صحیح موجود در بازه $\left[-\frac{3}{2}, 4\right]$ عبارت‌اند از: $-1, 0, 1, 2, 3, 4$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - \sqrt{(x-1)^2} = x - |x-1|$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x - x + 1 = 1 & ; x > 1 \\ x + x - 1 = 2x - 1 & ; x \leq 1 \end{cases}$$

تابع به ازای $x > 1$ یک تابع ثابت و در نتیجه معکوس‌ناپذیر است. بنابراین معکوس تابع را به ازای $x \leq 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1} \text{ دامنه } f \text{ برد } : x \leq 1 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow 2x - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow f^{-1} \text{ دامنه } = \{x | x \leq 1\}$$

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} ; x \leq 1$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۷

راه حل اول:

می‌دانیم:

$$D_f = R_{f^{-1}} , \quad R_f = D_{f^{-1}}$$

بنابراین باتوجه به برد تابع f به راحتی می‌توان فهمید کدام عدد در دامنه f^{-1} وجود ندارد.

$$D_f : x \neq 1$$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} \Rightarrow f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$$

باتوجه به اینکه $\frac{3}{x-1}$ همواره مخالف صفر است، بنابراین $f(x) \neq 2$ است؛ پس در دامنه تابع f^{-1} ، ۲ وجود نخواهد داشت.

راه حل دوم:

ضابطه تابع وارون را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x + 1 \Rightarrow yx - 2x = y + 1$$

$$x(y-2) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x \neq 2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

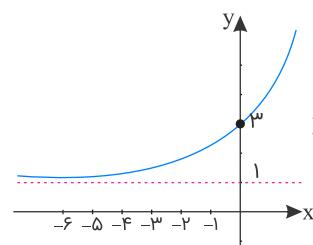
$$f(g(x)) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\frac{x-1}{x} = t \Rightarrow tx - x + 1 = 0 \Rightarrow x(t-1) = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{t-1}$$

$$f(t) = \frac{2\left(\frac{-1}{t-1}\right) + 1}{\frac{-1}{t-1} - 1} = \frac{-2 + t - 1}{-1 - t + 1} = \frac{t-3}{-t} \Rightarrow f(x) = \frac{-x+3}{x}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{-x+3}{x} + \frac{x-1}{x} = \frac{2}{x}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸



اگر $f(x) = \log_p^{(x+a)} + b$ باشد، نمودار داده شده مربوط به f^{-1} است. ضابطه آن را پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} y &= \log_p^{(x+a)} + b \Rightarrow y - b = \log_p^{(x+a)} \\ \Rightarrow p^{y-b} &= x + a \Rightarrow x = p^{y-b} - a \Rightarrow f^{-1}(x) = p^{x-b} - a \end{aligned}$$

شکل بالا مربوط به تابع $y = 2^{x+1} + 1$ است. در نتیجه $a = b = -1$ می شود؛ بنابراین $a + b = -2$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۸